Combinatoria III

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación

- Muchos problemas de conteo se pueden resolver encontrando el número de formas de organizar un número específico de elementos distintos de un conjunto de un tamaño particular, donde el orden de estos elementos es importante.

Motivación

- Muchos otros problemas de conteo se pueden resolver encontrando el número de formas de seleccionar un número particular de elementos de un conjunto de un tamaño particular, donde el orden de los elementos seleccionados no importa.

Motivación

- ¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomarse una foto?

Motivación

- ¿Cuántos comités diferentes de tres estudiantes se pueden formar a partir de un grupo de cuatro estudiantes?

Motivación

- En esta sección desarrollaremos métodos para responder preguntas como estas.

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto? ¿De cuántas formas podemos organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto?

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto? ¿De cuántas formas podemos organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto?

Solución:

- Primero, tenga en cuenta que el orden en el que seleccionamos a los estudiantes es importante.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto? ¿De cuántas formas podemos organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto?

Solución:

- Hay cinco formas para seleccionar al primer alumno que se sitúe al principio de la fila.

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto? ¿De cuántas formas podemos organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto?

Solución:

- Una vez que se ha seleccionado a este estudiante, hay cuatro formas de seleccionar al segundo estudiante en la línea.

Ejemplo 1

¿De cuántas formas podemos seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto? ¿De cuántas formas podemos organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto?

Solución:

- Después de seleccionar al primer y segundo alumno, hay tres formas de seleccionar al tercer alumno de la línea.

Ejemplo 1 II

- Según la regla del producto, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas de seleccionar a tres estudiantes de un grupo de cinco estudiantes para que hagan fila para tomar una foto.

Ejemplo 1 II

- Para organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto, seleccionamos al primer estudiante de cinco formas, al segundo de cuatro formas, al tercero de tres formas, al cuarto de dos formas y al quinto de una forma.

- En consecuencia, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas de organizar a los cinco estudiantes en una línea para una foto.

$\square$

- El ejemplo 1 ilustra cómo se pueden contar las disposiciones ordenadas de distintos objetos.

Permutación y permutación-r

- Esto conduce a cierta terminología.

Permutación y permutación-r

- Una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es una disposición ordenada de estos objetos.

- También nos interesan los arreglos ordenados de *algunos* de los elementos de un conjunto.

- Un arreglo ordenado de r elementos de un conjunto se llama **permutación-r**.

Ejemplo 2

Sea $S = \{1, 2, 3\}$. La disposición ordenada 3, 1, 2 es una permutación de S. La disposición ordenada 3, 2 es una permutación-2 de S.

$\square$

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- Las permutaciones-2 de S son las disposiciones ordenadas

$$a, b; a, c; b, a; b, c; c, a; c, b.$$

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- En consecuencia, hay seis permutaciones-2 de este conjunto con tres elementos.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- Siempre hay seis permutaciones-2 de un conjunto con tres elementos.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- Hay tres formas de elegir el primer elemento del arreglo.

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- Hay dos formas de elegir el segundo elemento del arreglo, porque debe ser diferente del primer elemento.

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Sea $S = \{a, b, c\}$. ¿Cuáles son las permutaciones-2 de S?

Solución:

- Por tanto, según la regla del producto, vemos que $P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$.

Teorema 1

Si n es un número entero positivo y r es un número entero con $1 \leq r \leq n$, entonces hay

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

permutaciones-r de un conjunto con n elementos distintos.

Teorema 1 I

Teorema 1

Si n es un número entero positivo y r es un número entero con $1 \leq r \leq n$, entonces hay

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

permutaciones-r de un conjunto con n elementos distintos.

Demostración:

- Usaremos la regla del producto para demostrar que esta fórmula es correcta.

Teorema 1

Si n es un número entero positivo y r es un número entero con $1 \leq r \leq n$, entonces hay

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

permutaciones-r de un conjunto con n elementos distintos.

Demostración:

- El primer elemento de la permutación se puede elegir de n formas porque hay n elementos en el conjunto.

Teorema 1 II

- Hay $n-1$ formas de elegir el segundo elemento de la permutación, porque quedan $n-1$ elementos en el conjunto después de usar el elemento elegido para la primera posición.

Teorema 1 II

- De manera similar, hay $n-2$ formas de elegir el tercer elemento, y así sucesivamente, hasta que existan exactamente $n-(r-1)=n-r+1$ formas de elegir el r-ésimo elemento.

Teorema 1 II

- En consecuencia, según la regla del producto, hay

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

permutaciones-r del conjunto.

■

Observación 1

Tenga en cuenta que $P(n, 0) = 1$ siempre que n es un número entero no negativo porque hay exactamente una forma de ordenar cero elementos. Es decir, hay exactamente una lista sin elementos, a saber, la lista vacía.

Corolario 1

Corolario 1

Si n y r son números enteros con $0 \leq r \leq n$, entonces

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

.

Corolario 1

Si n y r son números enteros con $0 \leq r \leq n$, entonces

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

.

Demostración:

- Cuando n y r son números enteros con $1 \leq r \leq n$, entonces por el Teorema 1 tenemos que

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Corolario 1

Corolario 1

Si n y r son números enteros con $0 \leq r \leq n$, entonces

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

.

Demostración:

- Cuando n y r son números enteros con $1 \leq r \leq n$, entonces por el Teorema 1 tenemos que

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

- Ya que $\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{(n)!} = 1$ siempre que n es un entero no negativo, vemos que la fórmula

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

también se cumple cuando $r = 0$.

Ejemplo 4

Suponga que una vendedora tiene que visitar ocho ciudades diferentes. Debe comenzar su viaje en una ciudad especificada, pero puede visitar las otras siete ciudades en el orden que desee. ¿Cuántos posibles órdenes puede utilizar la vendedora para visitar estas ciudades?

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Suponga que una vendedora tiene que visitar ocho ciudades diferentes. Debe comenzar su viaje en una ciudad especificada, pero puede visitar las otras siete ciudades en el orden que desee. ¿Cuántos posibles órdenes puede utilizar la vendedora para visitar estas ciudades?

Solución:

- El número de caminos posibles entre las ciudades es el número de permutaciones de siete elementos, porque la primera ciudad está determinada, pero los siete restantes pueden ordenarse arbitrariamente.

Ejemplo 4

Ejemplo 4

Suponga que una vendedora tiene que visitar ocho ciudades diferentes. Debe comenzar su viaje en una ciudad especificada, pero puede visitar las otras siete ciudades en el orden que desee. ¿Cuántos posibles órdenes puede utilizar la vendedora para visitar estas ciudades?

Solución:

- En consecuencia, hay $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ maneras para que la vendedora elija su recorrido.

Ejemplo 4

Suponga que una vendedora tiene que visitar ocho ciudades diferentes. Debe comenzar su viaje en una ciudad especificada, pero puede visitar las otras siete ciudades en el orden que desee. ¿Cuántos posibles órdenes puede utilizar la vendedora para visitar estas ciudades?

Solución:

- Si, por ejemplo, la vendedora desea encontrar el camino entre las ciudades con una distancia mínima y calcula la distancia total para cada camino posible, ¡debe considerar un total de 5040 caminos!

Ejemplo 5

Ejemplo 5

¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFGH$ contienen la cadena ABC?

Ejemplo 5

Ejemplo 5

¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFGH$ contienen la cadena ABC?

Solución:

- Debido a que las letras ABC deben aparecer como un bloque, podemos encontrar la respuesta al encontrar el número de permutaciones de seis objetos, a saber, el bloque ABC y las letras individuales D, E, F, G y H.

Ejemplo 5

¿Cuántas permutaciones de las letras *ABCDEFGH* contienen la cadena *ABC*?

Solución:

- Porque estos seis objetos pueden aparecer en cualquier orden, hay $6! = 720$ permutaciones de las letras *ABCDEFGH* en las que *ABC* aparece como un bloque.

$\square$

- Ahora centramos nuestra atención en contar selecciones desordenadas de objetos.

Combinaciones I

- Comenzamos resolviendo una pregunta planteada en la introducción a esta sección del capítulo.

Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuántos comités diferentes de tres estudiantes se pueden formar a partir de un grupo de cuatro estudiantes?

Ejemplo 6

Ejemplo 6

¿Cuántos comités diferentes de tres estudiantes se pueden formar a partir de un grupo de cuatro estudiantes?

Solución:

- Para responder a esta pregunta, solo necesitamos encontrar el número de subconjuntos con tres elementos del conjunto que contiene a los cuatro estudiantes.

Ejemplo 6

¿Cuántos comités diferentes de tres estudiantes se pueden formar a partir de un grupo de cuatro estudiantes?

Solución:

- Vemos que hay cuatro de esos subconjuntos, uno para cada uno de los cuatro estudiantes, porque elegir tres estudiantes es lo mismo que elegir uno de los cuatro estudiantes para dejarlo fuera del grupo.

Ejemplo 6

¿Cuántos comités diferentes de tres estudiantes se pueden formar a partir de un grupo de cuatro estudiantes?

Solución:

- Esto significa que hay cuatro formas de elegir a los tres estudiantes para el comité, donde el orden en el que se eligen estos estudiantes no importa.

□

Combinaciones II

- El ejemplo 6 ilustra que muchos problemas de conteo se pueden resolver encontrando el número de subconjuntos de un tamaño particular de un conjunto con n elementos, donde n es un número entero positivo.

Combinaciones II

- Una **combinación-r** de elementos de un conjunto es una selección desordenada de r elementos del conjunto.

- Por tanto, una combinación-r es simplemente un subconjunto con r elementos del conjunto del dominio del problema.

- El número de combinaciones-r de un conjunto con n elementos distintos se denota por $C(n, r)$.

- Tenga en cuenta que $C(n,r)$ también se denota por $\binom{n}{r}$ y se denomina coeficiente binomial.

Ejemplo 7

Ejemplo 7

Sea S el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Entonces $\{1, 3, 4\}$ es una combinación-3 de S. Tenga en cuenta que $\{4, 1, 3\}$ es la misma combinación-3 que $\{1, 3, 4\}$, porque el orden en el que los elementos de un conjunto se enumeran no importa.

$\square$

Combinaciones III

- Podemos determinar el número de combinaciones-r de un conjunto con n elementos usando la fórmula para el número de permutaciones-r de un conjunto.

- Para hacer esto, tenga en cuenta que las permutaciones-r de un conjunto se pueden obtener primero formando combinaciones-r y luego ordenando los elementos en estas combinaciones.

Combinaciones III

- La demostración del Teorema 2, que da el valor de $C(n, r)$, se basa en esta observación.

Teorema 2

El número de combinaciones-r de un conjunto con n elementos, donde n es un número entero no negativo y r es un número entero con $0 \leq r \leq n$, es igual a

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Teorema 2 I

Teorema 2

El número de combinaciones-r de un conjunto con n elementos, donde n es un número entero no negativo y r es un número entero con $0 \leq r \leq n$, es igual a

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Demostración:

- Las permutaciones-r $P(n, r)$ del conjunto se pueden obtener formando las combinaciones-r $C(n, r)$ del conjunto, y luego ordenando los elementos en cada combinación-r, lo cual se puede hacer en $P(r, r)$ formas.

Teorema 2

El número de combinaciones-r de un conjunto con n elementos, donde n es un número entero no negativo y r es un número entero con $0 \leq r \leq n$, es igual a

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Demostración:

- En consecuencia, por la regla del producto,

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r).$$

- Esto implica que

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Teorema 2 II

- También podemos usar la regla de la división para construir una demostración de este teorema.

Teorema 2 II

- Debido a que el orden de los elementos en una combinación no importa y hay $P(r,r)$ formas de ordenar r elementos en una combinación-r de n elementos, cada una de las $C(n,r)$ combinaciones-r de un conjunto con n elementos corresponde exactamente a $P(r,r)$ permutaciones-r.

- Por lo tanto, según la regla de división, $C(n,r) = P(n,r)/P(r,r)$, que implica como antes que $C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

■

Combinaciones IV

- La fórmula del Teorema 2, aunque explícita, no es útil cuando $C(n, r)$ se calcula para valores grandes de n y r.

- Las razones son que es práctico calcular valores exactos de factoriales exactamente sólo para valores enteros pequeños, y cuando se usa aritmética de punto flotante, la fórmula del Teorema 2 puede producir un valor que no es un número entero.

- Al calcular $C(n, r)$, primero tenga en cuenta que cuando cancelamos $(n-r)!$ del numerador y denominador de la expresión para $C(n, r)$ en el Teorema 2, obtenemos

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Combinaciones V

- En consecuencia, para calcular $C(n, r)$ puede cancelar todos los términos en el factorial más grande en el denominador del numerador y el denominador, luego multiplicar todos los términos que no se cancelan en el numerador y finalmente dividir por el factorial más pequeño en el denominador.

- Al hacer este cálculo a mano, en lugar de hacerlo por máquina, también vale la pena factorizar factores comunes en el numerador $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ y en el denominador $r!$.

- Tenga en cuenta que se pueden usar muchos programas computacionales para encontrar $C(n, r)$. [Estas funciones pueden llamarse $choose(n, k)$ o $binom(n, k)$.]

- El ejemplo 8 ilustra cómo se calcula $C(n, k)$ cuando k es relativamente pequeño en comparación con n y cuando k está cerca de n.

Combinaciones V

- También ilustra una identidad clave que disfrutan los números $C(n, k)$.

Ejemplo 8

¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas se pueden repartir con una baraja estándar de 52 cartas? Además, ¿cuántas formas hay de seleccionar 47 cartas de una baraja estándar de 52 cartas?

Ejemplo 8 I

Ejemplo 8

¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas se pueden repartir con una baraja estándar de 52 cartas? Además, ¿cuántas formas hay de seleccionar 47 cartas de una baraja estándar de 52 cartas?

Solución:

- Debido a que el orden en el que se reparten las cinco cartas de una baraja de 52 cartas no importa, hay

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!47!}$$

diferentes manos de cinco cartas que se pueden repartir.

Ejemplo 8

¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas se pueden repartir con una baraja estándar de 52 cartas? Además, ¿cuántas formas hay de seleccionar 47 cartas de una baraja estándar de 52 cartas?

Solución:

- Para calcular el valor de $C(52,5)$, primero divida el numerador y el denominador entre $47!$. para obtener

$$C(52,5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Ejemplo 8 II

$$C(52,5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

- Esta expresión se puede simplificar dividiendo primero el factor 5 en el denominador por el factor 50 en el numerador para obtener un factor 10 en el numerador.

Ejemplo 8 II

$$C(52,5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

- Luego dividiendo el factor 4 en el denominador por el factor 48 en el numerador para obtener un factor de 12 en el numerador.

Ejemplo 8 II

$$C(52,5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

- Posteriormente dividiendo el factor 3 en el denominador por el factor 51 en el numerador para obtener un factor de 17 en el numerador.

Ejemplo 8 II

$$C(52,5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

- Finalmente, dividiendo el factor 2 en el denominador por el factor 52 en el numerador para obtener un factor de 26 en el numerador.

Ejemplo 8 III

- Encontramos que

$$C(52,5) = 26 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 12 = 2,598,960.$$

- En consecuencia, hay $2,598,960$ manos de póquer diferentes de cinco cartas que se pueden repartir con una baraja estándar de 52 cartas.

Ejemplo 8 III

- Tenga en cuenta que hay

$$C(52,47) = \frac{52!}{47!5!}$$

diferentes formas de seleccionar 47 cartas de una baraja estándar de 52 cartas.

Ejemplo 8 III

- No necesitamos calcular este valor porque $C(52, 47) = C(52, 5)$.

- Sólo el orden de los factores $5!$ y $47!$ es diferente en los denominadores de las fórmulas para estas cantidades.

Ejemplo 8 III

- De ello se deduce que también hay $2,598,960$ formas diferentes de seleccionar 47 cartas de una baraja estándar de 52 cartas.

Corolario 2

Sean n y r números enteros no negativos con $r \leq n$. Entonces $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Corolario 2

Sean n y r números enteros no negativos con $r \leq n$. Entonces $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Demostración:

- Del Teorema 2 se sigue que

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Corolario 2

Sean n y r números enteros no negativos con $r \leq n$. Entonces $C(n,r) = C(n,n-r)$.

Demostración:

- Del Teorema 2 se sigue que

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- y

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Corolario 2

Corolario 2

Sean n y r números enteros no negativos con $r \leq n$. Entonces $C(n, r) = C(n, n-r)$.

Demostración:

- Del Teorema 2 se sigue que

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- y

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

- Así, $C(n, r) = C(n, n-r)$.

■

Prueba combinatoria I

Definición 1

Una *prueba combinatoria* de una identidad es una prueba que usa argumentos de conteo para probar que ambos lados de la identidad cuentan los mismos objetos pero de diferentes maneras o una prueba que se basa en mostrar que existe una biyección entre los conjuntos de objetos contados por los dos lados de la identidad. Estos dos tipos de pruebas se denominan *pruebas de conteo doble* y *pruebas biyectivas*, respectivamente.

Prueba combinatoria II

- Muchas identidades que involucran coeficientes binomiales pueden probarse usando demostraciones combinatorias.

Prueba combinatoria II

- Ahora mostramos cómo demostrar el Corolario 2 usando una prueba combinatoria.

Prueba combinatoria II

- Proporcionaremos una prueba de doble conteo y una prueba biyectiva, ambas basadas en la misma idea básica.

Prueba combinatoria III

Demostración:

- Usaremos una prueba biyectiva para mostrar que $C(n,r) = C(n,n-r)$ para todos los enteros n y r con $0 \leq r \leq n$.

Prueba combinatoria III

Demostración:

- Suponga que S es un conjunto con n elementos.

Prueba combinatoria III

Demostración:

- La función que mapea un subconjunto A de S a $\overline{A}$ es una biyección entre subconjuntos de S con r elementos y subconjuntos con $n - r$ elementos (como el lector debería verificar).

Prueba combinatoria III

Demostración:

- La identidad $C(n,r) = C(n,n-r)$ se sigue porque cuando hay una biyección entre dos conjuntos finitos, los dos conjuntos deben tener el mismo número de elementos.

Prueba combinatoria IV

- Alternativamente, podemos reformular este argumento como una prueba de doble conteo.

Prueba combinatoria IV

- Por definición, el número de subconjuntos de S con r elementos es igual a $C(n, r)$.

Prueba combinatoria IV

- Pero cada subconjunto A de S también se determina especificando qué elementos no están en A, así están en $\overline{A}$.

Prueba combinatoria IV

- Dado que el complemento de un subconjunto de S con r elementos tiene $n - r$ elementos, también hay $C(n, n - r)$ subconjuntos de S con r elementos.

Prueba combinatoria IV

- De ello se deduce que $C(n,r) = C(n,n-r)$.

$\blacksquare$

Ejemplo 9

¿Cuántas formas hay de seleccionar a cinco jugadores de un equipo de tenis de 10 miembros para hacer un viaje a un partido en otra escuela?

Ejemplo 9

¿Cuántas formas hay de seleccionar a cinco jugadores de un equipo de tenis de 10 miembros para hacer un viaje a un partido en otra escuela?

Solución:

- La respuesta viene dada por el número de combinaciones-5 de un conjunto con 10 elementos.

Ejemplo 9

¿Cuántas formas hay de seleccionar a cinco jugadores de un equipo de tenis de 10 miembros para hacer un viaje a un partido en otra escuela?

Solución:

- La respuesta viene dada por el número de combinaciones-5 de un conjunto con 10 elementos.
- Según el teorema 2, el número de tales combinaciones es

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

$\square$

Ejemplo 10

Ejemplo 10

Un grupo de 30 personas han sido entrenadas como astronautas para ir a la primera misión a Marte. ¿Cuántas formas hay de seleccionar una tripulación de seis personas para esta misión (suponiendo que todos los miembros de la tripulación tengan el mismo trabajo)?

Ejemplo 10

Un grupo de 30 personas han sido entrenadas como astronautas para ir a la primera misión a Marte. ¿Cuántas formas hay de seleccionar una tripulación de seis personas para esta misión (suponiendo que todos los miembros de la tripulación tengan el mismo trabajo)?

Solución:

- El número de formas de seleccionar un equipo de seis de un grupo de 30 personas es el número de combinaciones-6 de un conjunto con 30 elementos, porque el orden en el que se eligen estas personas no importa.

Ejemplo 10

Un grupo de 30 personas han sido entrenadas como astronautas para ir a la primera misión a Marte. ¿Cuántas formas hay de seleccionar una tripulación de seis personas para esta misión (suponiendo que todos los miembros de la tripulación tengan el mismo trabajo)?

Solución:

- El número de formas de seleccionar un equipo de seis de un grupo de 30 personas es el número de combinaciones-6 de un conjunto con 30 elementos, porque el orden en el que se eligen estas personas no importa.
- Según el teorema 2, el número de tales combinaciones es

$$C(30,6) = \frac{30!}{6!24!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 593,775.$$

$\square$

Ejemplo 11

Ejemplo 11

¿Cuántas cadenas de bits de longitud n contienen exactamente r 1s?

Ejemplo 11

¿Cuántas cadenas de bits de longitud n contienen exactamente r 1s?

Solución:

- Las posiciones de r 1s en una cadena de bits de longitud n forman una combinación-r del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

Ejemplo 11

¿Cuántas cadenas de bits de longitud n contienen exactamente r 1s?

Solución:

- Las posiciones de r 1s en una cadena de bits de longitud n forman una combinación-r del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$.
- Por lo tanto, hay $C(n, r)$ cadenas de bits de longitud n que contienen exactamente r 1s.

Ejemplo 12 I

Ejemplo 12

Suponga que hay 9 profesores en el departamento de matemáticas y 11 en el departamento de ciencias de la computación. ¿Cuántas formas hay de seleccionar un comité para desarrollar un curso de matemáticas discretas en una escuela si el comité está formado por tres miembros de la facultad del departamento de matemáticas y cuatro del departamento de ciencias de la computación?

Ejemplo 12 II

Solución:

- Según la regla del producto, la respuesta es el producto del número de combinaciones-3 de un conjunto con nueve elementos y el número de combinaciones-4 de un conjunto con 11 elementos.

Ejemplo 12 II

Solución:

- Según el Teorema 2, el número de formas de seleccionar el comité es

$$C(9,3) \cdot C(11,4) = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{11!}{4!7!} = 84 \cdot 330 = 27,720.$$

$\square$

Ejercicios I

1. Calcule el valor de cada una de estas cantidades.
    1. $P(6,3)$
    2. $P(6,5)$
    3. $P(8,1)$
    4. $P(8,5)$
    5. $P(8,8)$
    6. $P(10,9)$
2. Calcule el valor de cada una de estas cantidades.
    1. $C(5,1)$
    2. $C(5,3)$
    3. $C(8,4)$
    4. $C(8,8)$
    5. $C(8,0)$
    6. $C(12,6)$
3. ¿En cuántos órdenes diferentes pueden terminar una carrera cinco corredores si no se permiten empates?
4. ¿Cuántas cadenas de bits de longitud 10 contienen
    1. exactamente tres 1s?
    2. a lo más tres 1s?
    3. al menos tres 1s?
    4. un número igual de 0s y 1s?

Ejercicios II

5. ¿Cuántas maneras hay para que cuatro hombres y cinco mujeres que están haciendo fila
   1. todos los hombres queden juntos?
   2. todas las mujeres queden juntas?
6. ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFG$ contienen
   1. las cadenas BA y GF?
   2. las cadenas ABC y DE?
   3. las cadenas ABC y CDE?
   4. las cadenas CBA y BED?
7. ¿Cuántas formas hay para que termine una carrera de tres caballos si es posible empatar? [Nota: dos o tres caballos pueden empatar.]